***Exercice* 1**

Etablir la formulation faible du problème ci-après de conduction thermique dans une barre de longueur 2ℓ

$$-\kappa[\mathrm{d}^2T(x)/\mathrm{d}x^2] + \rho T(x) = Q\delta_\ell \qquad 0 < x < 2\ell$$

compte tenu des deux conditions de bord

$$[\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)]\big|_{x=0} = t \qquad\qquad [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)]\big|_{x=2\ell} + r\,T(2\ell) = 0$$

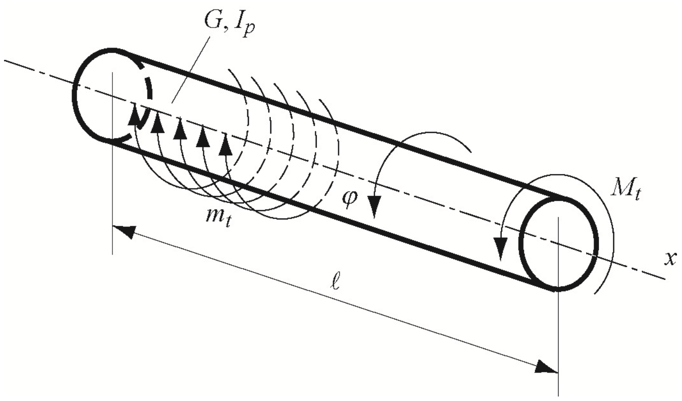
où T dénote la température, κ représente le coefficient de conductibilité thermique admis constant, ρ et r sont des constantes de proportionnalité, Q désigne l'amplitude d'une source ponctuelle d'énergie-chaleur (impulsion de Dirac δ_ℓ au point central $x = \ell$ de la barre) et t est un flux d'énergie-chaleur à l'extrémité $x = 0$ du barreau.

***Exercice* 2**

Un arbre cylindrique de longueur ℓ, de section uniforme à moment d'inertie polaire I_p et de module de glissement G est soumis sur toute sa longueur à un moment de torsion réparti m_t et est sollicité en son extrémité $x = \ell$ à un moment de torsion constant M_t. Rechercher la forme faible de l'équation différentielle régissant l'angle de rotation φ de l'arbre. Sachant que le moment réparti a pour allure

$$m_t = 4\mu\,(x/\ell)(1 - x/\ell)$$

où μ est son amplitude maximale admise constante, trouver la valeur du moment de torsion d'extrémité M_t pour que l'existence d'une solution faible soit garantie.



***Exercice* 3**

Rechercher les fonctions de base d'un élément fini unidimensionnel quadratique, satisfaisant les trois critères classiques de convergence (continuité, différentiabilité et complétude).